



Buena práctica

Álgebra Lineal, Antenas y Fractales

Universidad Católica del Uruguay
Montevideo, Uruguay

Responsable:
Joel Gak
Profesor Investigador de alta dedicación
Departamento de Ingeniería , Universidad Católica del Uruguay
Email: jgak@ucu.edu.uy

Palabras clave:
Innovación en metodologías enseñanza | Innovación en metodologías evaluación | Tecnologías para la enseñanza

Resumen ejecutivo

La práctica que describiremos tiene como fin proponer una secuencia de actividades para estudiar y analizar una aplicación de la Matemática en un contexto tecnológico, promoviendo el interés en los estudiantes que cursan la asignatura Álgebra Lineal de diversas carreras de Ingeniería en la Universidad Católica del Uruguay. En particular se propuso a los estudiantes que estudien aspectos de la Geometría Fractal (GF) y su vinculación con el Álgebra Lineal (Sistema de Funciones Iteradas matricialmente) y las antenas fractales como aplicación. Las actividades consistieron en el diseño en Python de una antena basada en el triángulo de Sierpinski, en su construcción en una placa de cobre en forma de circuito impreso y en medir alguna característica de las antenas mediante la utilización de radios definidas por software (SDR) disponibles en el Departamento de Ingeniería.

La propuesta se basa en la corriente didáctica “La Matemática en el contexto de las ciencias”, pero también en áreas de conocimiento más relacionadas con la ingeniería y tecnología: antenas multibanda y su miniaturización. Por lo tanto, la estructura de la antena debe incluir diferentes tamaños, y debe utilizar de manera eficaz el espacio que ocupe. Es pertinente pensar que las antenas diseñadas con GF, puedan contemplar estas características debido a la propiedad de autosemejanza (réplicas en distintas partes del fractal a menor escala) y la característica que poseen algunos fractales respecto a su perímetro infinito encerrado en área finita.

En el ámbito de la enseñanza de la Matemática, se reconoce a la GF por su potencial para estudiar y/o recuperar gran cantidad de nociones matemáticas, y por las aplicaciones que tiene. Sin embargo, un análisis realizado acerca de las investigaciones que proponen su enseñanza en el nivel medio y primeros años de universidad, dio indicios que la forma en que esta geometría es enseñada, es haciendo referencia a lo visual y a su aspecto estético, con pocas definiciones operativos para un estudiante.

Al finalizar el curso, los estudiantes realizaron una encuesta de valoración sobre las actividades que involucran GF. Un análisis descriptivo y cualitativo de las respuestas a las preguntas de valoración general del curso, indica que el curso fue evaluado entre muy bueno (50%) y excelente (50%). La valoración de las actividades fue para el 85% interesantes y muy interesantes. Entre los aspectos que más destacaron de la propuesta, mencionan el trabajo colaborativo; la aplicación de la matemática en las antenas fractales; el uso de software; el dinamismo y la práctica en laboratorio; y

los fractales como algo distinto en la clase de matemática.

Las tareas fueron realizadas en grupos durante el año 2021. Para el año que corre se propusieron las mismas tareas elaborando un pre test, una intervención (trabajo en laboratorio) y un post test para analizar la conceptualización de los elementos de la GF que se estudiaron.

Descripción detallada de la práctica

Dimensión: Contexto y origen de la práctica

Caracterización del contexto y la situación que origina y en la que tiene lugar la práctica

La práctica se enmarca en un modelo de enseñanza y aprendizaje que está siendo promovido por la Universidad Católica del Uruguay, el cual implica el desarrollo de competencias transversales en los estudiantes, mediante actividades interdisciplinarias. Un eje temático del Plan Estratégico 2019-2021 es Excelencia en el aprendizaje interdisciplinario y transversal, de cara a un mundo disruptivo, que tiene como objetivo lograr la integración curricular transversal de los programas de las asignaturas.

Tradicionalmente el docente de Matemática en ingeniería trasmite el conocimiento con cálculos existentes en libros de texto, conformándose con que el estudiante repita el método mostrado sin creación de su parte. En la formación de futuros ingenieros, el estudio de la Matemática formal no es un objetivo en sí mismo, aunque necesitan matematizar problemas. Esto genera un conflicto cognitivo en el estudiante que se enfrentó a la Matemática y a la Ingeniería de forma separada.

Planteamiento de pertinencia de la práctica a partir de la situación, problema u oportunidad detectada

Los procesos de enseñanza-aprendizaje que se presentan cuando los estudiantes afrontan a la Matemática a través de sus aplicaciones requieren del desarrollo de una competencia conocida como modelización matemática, esto es, la creación o la utilización de modelos matemáticos para resolver problemas en contexto (Niss, 1991). Un problema aplicado en matemática, está enmarcado en una situación o contexto del mundo real (el “resto del mundo” fuera de la Matemática), así como las preguntas que vinculan conceptos matemáticos con dicha situación (Niss, 1991). La implementación de este tipo de problemas no solo desarrolla las competencias matemáticas y propias de la modelización, si no que genera un mayor interés por la asignatura y promueve un pensamiento diversificado en los estudiantes (Alsina, 2007).

Respecto a la actividad del estudiante, el objetivo es que esté capacitado para poder utilizar el conocimiento matemático en otras áreas que la requieran en su ámbito profesional.

Dimensión: Planificación de la práctica

Planteamiento de objetivos de la práctica

- Estudiar el concepto matemático fractal y conectar aprendizajes de diferentes áreas de conocimiento.
- Diseñar en Python una antena fractal basada en el triángulo de Sierpinski.
- Diseñar circuitos impresos con diferentes iteraciones del fractal.
- Mediar las características de las antenas diseñadas mediante radios definidas por software (SDR).
- Elaborar un informe con las conclusiones obtenidas y con nuevas preguntas de investigación.

Proceso de diseño y planificación, identificación de los actores involucrados y definición de recursos

La secuencia de actividades fue diseñada por dos Profesores de Alta Dedicación de la Universidad Católica del

Uruguay, la Mag. Victoria Artigue y el Dr. Joel Gak (ambos responsables del proyecto), uno de ellos integra el Depto. de Ciencias Exactas y Naturales dictando cursos de Matemática y el otro el Depto. de Ingeniería ; y tres expertos en Didáctica de la Matemática y dos en Matemática aplicada y Matemática pura.

La intención de este equipo fue diseñar y aplicar una secuencia de actividades enmarcadas en una aplicación de la GF: las antenas multibanda, para estudiar la percepción y valoración de los estudiantes acerca de actividades de aplicación. Este año se propone analizar cómo influye este tipo de tareas en la conceptualización de la GF. Los beneficiarios directos, por lo tanto, son los estudiantes, pero también toda la comunidad universitaria y de investigación en didáctica de la Matemática ya que la propuesta está siendo difundida en diferentes congresos de educación matemática y en jornadas propias de la universidad.

El diseño de la práctica comenzó en el año 2020, realizando un estado del arte en base a la literatura y artículos de investigación sobre GF. Se aplicó en los dos semestres del año 2021 y en el primero del 2022. Los recursos tecnológicos que se utilizaron fueron: Libros interactivos, *applets* de GeoGebra, Python, materiales propios de la construcción de la antena y del análisis de alguna de sus características. El trabajo realizado por los estudiantes fue en el laboratorio de electrónica y domiciliariamente.

El curso de Álgebra Lineal tiene los siguientes contenidos curriculares: matrices, determinantes, sistemas de ecuaciones, espacios vectoriales, transformaciones lineales y transformaciones afines. Es pertinente pensar en la GF para ser abordada durante el curso, ya que la construcción de un fractal con autosemejanza estricta requiere de la elaboración de un Sistema de Funciones Iteradas, que son funciones definidas por composición de una isometría con una homotecia (semejanza) y eventualmente con una traslación. Las transformaciones son expresadas en el curso matricialmente, sumándole el vector de traslación de ser necesario.

En el curso de Álgebra Lineal de la Universidad y en los textos clásicos, el concepto de dimensión es definido tradicionalmente como la cantidad de vectores que presenta una base de un espacio vectorial. La definición de dimensión fractal resulta ser una ampliación de esta definición.

Mecanismos de evaluación

La evaluación del curso de Álgebra Lineal fue de carácter formativo a lo largo de todo el semestre. Las actividades referidas a GF fueron contempladas para la aprobación del curso, realizando juicios valorativos y correcciones con rúbricas colaborativas con la posibilidad de que el estudiante entregue siempre una versión mejorada de su producción. Vale la pena aclarar que en la Universidad Católica del Uruguay este curso no tiene la posibilidad de rendir examen, por lo tanto el curso se aprueba o se vuelve a cursar. En este contexto, es imprescindible que el docente planifique una diversidad de tareas que apunten a las distintas realidades que existen en el aula. Consideramos importante aclarar que se propuso una prueba parcial escrita (tradicional) la cual incluyó un problema sobre algunos aspectos de la GF.

Para poder evaluar el potencial didáctico-matemático de la propuesta de enseñanza, diseñamos un cuestionario de valoración con escala Likert. Los ítems a evaluar refirieron a: dificultades para comprender aspectos de la GF, importancia de relacionar la Matemática con otros campos de conocimiento, utilización de sitios y *applets* para mejorar la conceptualización de algunos contenidos, importancia de incluir este tipo de tareas en la formación de ingenieros.

El análisis de las respuestas del cuestionario fue cualitativo y cuantitativo. Para el primero se elaboraron categorías que emergieron de las respuestas, para el segundo se realizó un análisis estadístico con SPSS.

Dimensión: Implementación de la práctica

Descripción de la implementación de la práctica, indicando etapas, acciones y actividades específicas

La práctica se comenzó a implementar en el año 2019, proponiendo la secuencia sobre GF y su aplicación a las antenas pero sin su construcción. En el 2020 fue similar y en el 2021 el proyecto de construcción por estudiantes, fue postulado para un curso de 3 créditos titulado Iniciación a la investigación. Un estudiante se

inscribió y llevó a cabo la tarea de construcción. En paralelo, 26 estudiantes de un curso de Álgebra Lineal de las carreras de Ingeniería en Informática, Audiovisual, Electrónica y Alimentos, lograron construirla. El docente del curso intercaló las actividades sobre los contenidos curriculares con aquellas sobre GF. Estas últimas se propusieron cada dos semanas y son las siguientes:

1. Videos sobre antenas fractales

Consigna: A partir de la visualización de un video, identificar las principales ventajas de las antenas fractales. Elaborar un archivo único en grupo y subirlo a la plataforma.

Objetivo: Introducir al estudiante en una aplicación de la Matemática en un contexto tecnológico.

2. Lectura Mathigon

Consigna: Interactuar con el libro interactivo Mathigon (<https://es.mathigon.org/course/fractals/introduction>) y realizar todas las actividades que se plantean en el libro.

Objetivo: Introducir al estudiante en los conceptos clave de la GF.

3. Diseño en GeoGebra

Consigna: Utilizar GeoGebra para diseñar antenas basadas en el triángulo de Sierpinski. Utilizar el comando AplicaMatriz para efectuar transformaciones geométricas (Transformación matricial, y por lo tanto, lineal) y la herramienta traslación.

Objetivo: Introducir en el curso un software de geometría dinámica con sus diferentes herramientas.

4. Autosemejanza y Dimensión

Consigna: Elegir un fractal del sitio <http://www.shodor.org/interactivate/activities/FractalDimensions/>. Utilizar la definición propuesta en el curso de autosemejanza estricta y de dimensión fractal y aplicarla en el fractal elegido.

Objetivo: Identificar las transformaciones geométricas necesarias para la construcción de los fractales. Determinar dichas transformaciones en forma matricial. Justificar matemáticamente la autosemejanza estricta y la dimensión de un fractal.

Identificar las transformaciones geométricas necesarias para la construcción de los fractales. Determinar dichas transformaciones en forma matricial.

5. Construcción de una antena fractal

Consigna: Construir en una placa de cobre la antena en forma de circuito impreso.

Objetivo: Acercamiento a los procesos de fabricación de circuitos impresos

6. Estudio del comportamiento de la antena construida

Consigna: Utilizar radios definidas por software el para analizar el comportamiento de la antena

Objetivo: Medir las características de las antenas diseñadas mediante la utilización de radios definidas por software (SDR) disponibles en el Departamento de Ingeniería

7. Evaluación de la propuesta

Consigna: Completar el formulario de evaluación del curso con una escala de valoración Likert.

Objetivo: Estudiar la valoración por parte de los estudiantes en cuanto al potencial didáctico-matemático de la propuesta que atravesaron durante el curso. Identificar debilidades y fortalezas en ella

Los Actividades 1 y 2, tuvieron como actores principales los estudiantes y docentes del departamento de Ciencias Naturales y exactas. Las actividades de la 3 hasta la 7, los docentes del departamento de Ciencias Naturales y exactas y docentes del Departamento de Ingeniería. La actividad 7 fue realizada por los estudiantes.

Identificación y justificación de eventuales cambios durante la implementación

No se presentaron cambios pertinentes.

Dimensión: Resultados de la práctica

Proceso de evaluación y descripción de resultados

El curso de Álgebra Lineal tuvo 31 alumnos inscritos, de los cuales 4 no aprobaron, 1 abandonó el curso y 26 aprobaron. Los aspectos que más destacaron de la propuesta fueron, trabajo colaborativo; aplicación de la matemática en las antenas fractales; uso de software; el dinamismo y la práctica en laboratorio; y los fractales como algo distinto en la clase de matemática. Un comentario de un estudiante fue:

“El tema de Fractales me pareció muy interesante, en particular poder aplicarlo a casos concretos, y lo mismo con matrices. Además, para conceptos abstractos como la dimensión, siento que ayudaron mucho las actividades interactivas como el libro de Mathigon. También fue muy bueno hacer la antena, y fue muy divertido cuando disolvimos una batea de aluminio. Me gustó mucho hacer un proyecto de este estilo en vez de un examen clásico. Siento que aprendí un montón y disfruté el proceso, no fue un cierre estresante como suele ser en otras materias.”

Los resultados son alentadores. Si bien el 69% de los estudiantes reconoció cierta dificultad para la construcción de un fractal usando elementos del álgebra lineal, 77% de los estudiantes sostuvo que la definición de autosemejanza estricta presentada facilitó su comprensión de la dimensión fractal. Un 69% de los estudiantes declaró que comprender que la dimensión fractal puede ser un número no entero, no resulta tan difícil.

La valoración del uso de las herramientas tecnológicas, 96% de los estudiantes indicó que los materiales interactivos ayudaron a comprender las características de los fractales. La posibilidad de generar interés en el estudio de la Matemática, un 85% considera que estudiar fractales le hizo pensar en cuestiones nuevas, como patrones u operaciones que se repiten indefinidamente. El 92% aceptan que los fractales representan una matemática actual con aplicaciones tecnológicas.

Respecto a la matemática en contexto, 92% de los estudiantes valoraron positivamente la incorporación de las antenas fractales en el curso. Un 62% reconoció que el aprendizaje de fractales tiene mucha relación con su formación profesional. Un 85% expresó que le gustaría saber más sobre fractales y sus usos en otras áreas. El 73% estuvo de acuerdo con que estudiar matemática en contexto, representa una ayuda a su estudio. El 96% expresaron sentir emoción cuando constataron que la antena funcionaba, y el mismo porcentaje estuvo de acuerdo con la importancia de incorporar actividades en contexto en los cursos de matemática para fortalecer habilidades.

Se realizó una prueba de contraste de hipótesis unilateral para cada pregunta, estableciendo un nivel de confianza del 1%. Los valores presentados muestran que la totalidad de las hipótesis fueron rechazadas al nivel de significancia de $p < 0,001$. Esto nos permite aceptar que la propuesta fue muy bien aceptada para esta población de estudiantes de ingeniería, ya que se obtuvieron puntuaciones de dos o tres.

Análisis de la práctica

Dimensión: Proyección de la práctica a futuro

Propuesta de proyección y sostenibilidad de la práctica a futuro; descripción de eventuales ajustes y modificaciones de la práctica para futuras implementaciones

La propuesta de enseñanza se está llevando a cabo en el primer semestre del año que corre. El ajuste que nos propusimos realizar fue el diseño en lenguaje de programación Python, de la antena fractal basada en el triángulo de Sierpinski. Los estudiantes de las diferentes carreras de ingeniería han cursado programación como asignatura curricular en el primer año, motivo por el cual no fue un obstáculo la elaboración del programa solicitado.

Pretendemos mejorar la práctica en los siguientes sentidos: continuar con la fabricación de antenas utilizando diferentes fractales (curva de Koch, alfombra de Sierpinski, árbol pitagórico, conjunto de Cantor), para la cual contamos con una gran cantidad de tesis sobre el tema; indagar sobre otras aplicaciones de los fractales, por ejemplo, utilizar el método de box counting para medir la dimensión de objetos como rocas o tumores (aplicaciones que pueden contribuir en otras carreras de la Universidad como medicina o agronomía). También se está comenzando a implementar otro ejercicio en el cual se aplica la resolución de sistemas lineales mediante escalerización para aplicación sobre juegos electrónicos, la idea es programar estos algoritmos en un plataforma arduino (<https://www.arduino.cc/>) para la resolución de un juego electrónico llamado Lights out (en español Luces fuera)

Respecto a la sostenibilidad de esta práctica, la misma es realizada en su totalidad por docentes de alta

dedicación de la UCU y los costos de los insumos totales son bajos (menos de USD 200) los cuales pueden ser absorbidos por las carreras de ingeniería.

Dimensión: Apreciación global de la práctica

Análisis de cumplimiento de objetivos de la práctica

Las preguntas de valoración del curso, indica que el curso fue evaluado entre muy bueno (50%) y excelente (50%).

Los resultados son alentadores. Si bien el 69% de los estudiantes reconoció cierta dificultad para la construcción de un fractal usando elementos del álgebra lineal, 77% de los estudiantes sostuvo que la definición de autosemejanza estricta presentada facilitó su comprensión de la dimensión fractal. Un 69% de los estudiantes declaró que comprender que la dimensión fractal puede ser un número no entero, no resulta tan difícil.

La valoración del uso de las herramientas tecnológicas, el 96% de los estudiantes indicó que los materiales interactivos ayudaron a comprender las características de los fractales. La posibilidad de generar interés en el estudio de la Matemática, un 85% considera que estudiar fractales le hizo pensar en cuestiones nuevas, como patrones u operaciones que se repiten indefinidamente. El 92% aceptan que los fractales representan una matemática actual con aplicaciones tecnológicas.

Respecto a la matemática en contexto, 92% de los estudiantes valoraron positivamente la incorporación de las antenas fractales en el curso. Un 62% reconoció que el aprendizaje de fractales tiene mucha relación con su formación profesional. Un 85% expresó que le gustaría saber más sobre fractales y sus usos en otras áreas. El 73% estuvo de acuerdo con que estudiar matemática en contexto, representa una ayuda a su estudio. El 96% expresaron la importancia de incorporar actividades en contexto en los cursos de matemática para fortalecer habilidades.

Se realizó una prueba de contraste de hipótesis unilateral para cada pregunta, estableciendo un nivel de confianza del 1%. Los valores presentados muestran que la totalidad de las hipótesis fueron rechazadas al nivel de significancia de $p < 0,001$. Esto nos permite aceptar que la propuesta fue muy bien aceptada para esta población de estudiantes de ingeniería, ya que se obtuvieron puntuaciones de dos o tres

Evaluación reflexiva sobre la práctica implementada, con énfasis en su potencial de transformación

Nuestra reflexión sobre la práctica implica también analizar la recepción por parte de la comunidad académica de Enseñanza de la Matemática, del potencial didáctico de la propuesta. Una evaluación formativa por parte de expertos en didáctica, nos permitirá una reflexión más profunda y dirigida a aquellos aspectos que puedan ser mejorados. Para este cometido sometimos a evaluación un trabajo titulado "Application of Fractal Geometry in the construction of antennas: an assessment of activities in context by engineering students" Victoria Artigue, Joel Gak, María de los Ángeles Fanaro, Gabriela Momburu y Jose-Job Flores-Godoy, en la revista Pensamiento Matemático, de Enseñanza de la Matemática de la Universidad Politécnica de Madrid. El trabajo fue aceptado para ser publicado en abril del año 2023.

Por otro lado, la práctica fue presentada en el 9no Congreso Uruguayo de Educación Matemática (CUREM) llevado a cabo en la ciudad de Montevideo en junio del presente año. El público presente en la comunicación breve realizó diversas preguntas y valoró la puesta en práctica de actividades en contexto extramatemático en carreras de ingeniería como positiva y motivadora para los estudiantes.

Documentos

[Buenas Prácticas Artigue Gak](#)

©2022

Centro Interuniversitario de Desarrollo - CINDA

Esta obra está bajo una Licencia de Creative Commons Reconocimiento 4.0.