



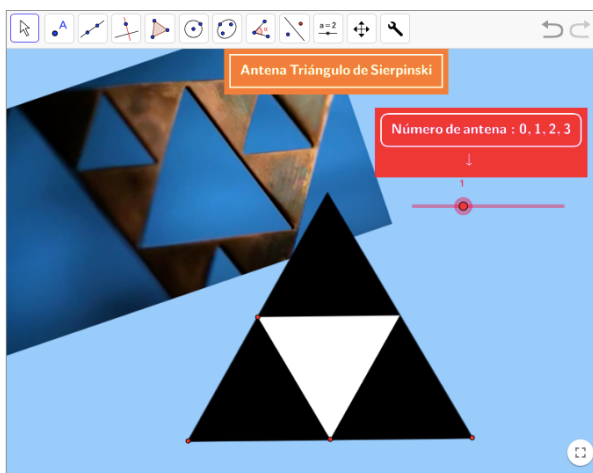
1. Las actividades

Las actividades que componen la propuesta de enseñanza fueron diseñadas con la opción “libro” de GeoGebra. El link al libro es el siguiente: <https://www.geogebra.org/m/uzxcvyns#material/m5jvsfx6>. Otros recursos utilizados a lo largo de la propuesta fueron:

- Mathigon: <https://es.mathigon.org/course/fractals/introduction>
- InterActivate: <http://www.shodor.org/interactivate/activities/FractalDimensions/>
- Video sobre antenas fractales: <https://www.youtube.com/watch?v=50KUGdAvMGw>

Algunas consignas de las actividades

- A. *La empresa Fractus quiere fabricar un tipo de antena cuya figura inicial sea un triángulo equilátero, como se muestra en la siguiente figura. Mediante el deslizador puede ver las demás antenas que está pensando fabricar. Describir y explicar de qué manera se obtienen las diferentes antenas. ¿Cuál es el perímetro de cada antena, considerando que la antena número 0 es un triángulo equilátero de lado 1 unidad? ¿Y el área de cada una de ellas? ¿Qué reflexiones le merece los resultados anteriores respecto al aprovechamiento del material?*



Fuente: elaboración personal. Imagen fija del applet incrustado en el libro GeoGebra que contiene la secuencia de actividades.

- B. ingrese a la siguiente página web InterActivate, y recorra las pestaña “Aprendiz” , “Actividad” y “Ayuda”. Realice un resumen de media carilla de word a simple espacio sobre lo que entendió de dimensión fractal. En la pestaña Actividad, realice lo siguiente:
1. Para cada fractal, complete los campos de texto con el factor de escala y el número de copias. Note que recién cuando los valores ingresados sean correctos, el sitio devolverá como resultado la dimensión de cada fractal.
 2. Elija un fractal de los que se muestran y justifique que tienen autosemejanza estricta con la definición que se brinda a continuación.
 3. Para el fractal elegido en 2, calcule la dimensión fractal utilizando la definición de más abajo. Además, proponga un SFI para su construcción.
 4. Ordene la dimensión de todos los fractales presentados en la página “InterActivate”, de menor a mayor, y a partir de esta ordenación, elabore una conclusión que relacione la dimensión fractal con “qué tanto llena el fractal”.



5. Elabore un archivo único .pdf y subalo al espacio tarea correspondientes en la webasignatura.

DEFINICIÓN DE AUTOSEMEJANZA ESTRICTA Y DIMENSIÓN FRACTAL: Una figura es autosemejante estrictamente si es obtenida como límite de un proceso iterativo a partir de una figura inicial llamada semilla, donde el resultado de cada paso se descompone en partes de manera que se cumplen las siguientes 3 condiciones:

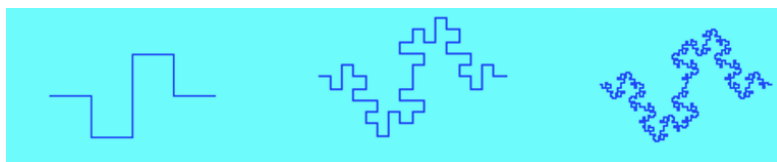
1. Cualquiera de las partes de la descomposición en cualquier paso es semejante a la semilla (es decir, cada parte es imagen de la semilla por medio de una cierta semejanza, y todas ellas comparten el mismo factor).
2. El cociente entre: el factor de semejanza de cualquiera de las partes correspondiente a un cierto paso con la semilla, y el factor de semejanza de las partes del paso anterior con la semilla, es constante.
3. El cociente entre las cantidades de partes correspondiente a un paso y a su anterior es constante.

Fuente: elaboración personal. La definición de autosemejanza estricta fue elaborada por el equipo, aceptándose como válida por expertos que evaluaron el artículo "Estado del arte sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría fractal en la escuela secundaria".

Fuente: extraído de <http://www.shodor.org/interactivate/activities/FractalDimensions/>

2. Algunas producciones de los estudiantes

- A. Uno de los problemas propuestos en el parcial implicaba elaborar un SIF para el fractal cuyas 3 primeras iteraciones fueran las siguientes:



Una solución propuesta fue la siguiente:



$$T_1) \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T_2) \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90) & -\sin(-90) \\ \sin(-90) & \cos(-90) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_3) \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$

$$T_4) \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90) & -\sin(-90) \\ \sin(-90) & \cos(-90) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_5) \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(90) & -\sin(90) \\ \sin(90) & \cos(90) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_6) \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

$$T_7) \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(90) & -\sin(90) \\ \sin(90) & \cos(90) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_8) \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fuente: elaboración de un estudiante del curso de Álgebra Lineal de la Universidad Católica del Uruguay

- B. El diseño de la antena en Python contribuyó a poder fabricar antenas basadas en diferentes iteraciones.

```

main.py x
25     triangle =
Polygon(Point(originalTrianglePoints[0][0],
originalTrianglePoints[0][1]),
26
Point(originalTrianglePoints[1][0],
originalTrianglePoints[1][1]),
27
Point(originalTrianglePoints[2][0],
originalTrianglePoints[2][1]))
28     triangle.setWidth(10)
29     triangle.setOutline(colours[2])
30     triangle.draw(window)
31     return
32 else:
33     for i in range(3):
34         # Homotetizo.
35         trianglePoints =
dilation(originalTrianglePoints, matrixD)
36         newMatrixT = [trianglePoints[i][0],
trianglePoints[i][1]]
37         # Traslado.
38         trianglePoints = traslationXY(trianglePoints,
newMatrixT)
39
40         # Se generan nuevos puntos.
41         pointA = Point(trianglePoints[0][0],

```

Fuente: elaboración de un estudiante del curso de Álgebra Lineal de la Universidad Católica del Uruguay

- C. Manos a la obra. La construcción de la antena como circuito impreso, quedó así en uno de los equipos:



Fuente: elaboración de un grupo de estudiantes del curso de Álgebra Lineal de la Universidad Católica del Uruguay

3. El análisis estadístico

Los ítems que debieron evaluar los estudiantes fueron:

1. Comprendí rápidamente las propiedades que presentan los fractales.
2. Los materiales interactivos (libros, sitios, applets) ayudaron a que comprendiera algunas características de los fractales.
3. El conocimiento necesario para usar GeoGebra fue un obstáculo para completar algunas tareas.
4. Mis conocimientos de geometría permitieron poder explicar la construcción de algunos fractales.
5. Algunas de las características de los fractales me resultaron difíciles de aprender.
6. Utilizar la definición de autosemejanza estricta me permitió comprender "más matemáticamente" la idea de dimensión.
7. Utilizar GeoGebra para construir un fractal me resultó gratificante.
8. Me resultó difícil comprender qué significa que la dimensión fractal puede ser un número no entero.
9. Es difícil describir con precisión la construcción de un fractal usando lenguaje algebraico para describir las transformaciones necesarias.
10. A veces un material interactivo puede inducir a errores, porque solo puede mostrar los primeros pasos de la construcción de un fractal y no es posible representar el fractal mismo.
11. Tomar contacto con fractales me hizo pensar en cosas que no había considerado antes, como procesos infinitos, o reconocer patrones o similitudes, u operaciones que se repiten indefinidamente.
12. Lo que aprendí de fractales no se relaciona con mi formación profesional.
13. Me gustaría saber más sobre fractales, para saber si tienen usos en otras áreas.
14. Los fractales muestran una Matemática nueva y aplicaciones recientes (antenas, mercados financieros) y por eso vale la pena estudiarla.
15. Habiendo aprendido de fractales, refuerzo la idea de que la Matemática es demasiado abstracta y sin aplicaciones.
16. Poder relacionar fractales con aplicaciones que me interesan me ayudó a estudiarlos.
17. Algunas de las aplicaciones de los fractales no son de mi interés y por eso me resultó difícil estudiarlas.
18. Las antenas fractales no tienen nada que ver con los temas que vimos en el curso.
19. La construcción de la antena fue difícil para mí a pesar de haberla hecho en grupo.
20. El trabajo colaborativo ayudó a que la construcción de la antena me resultara una tarea fácil.



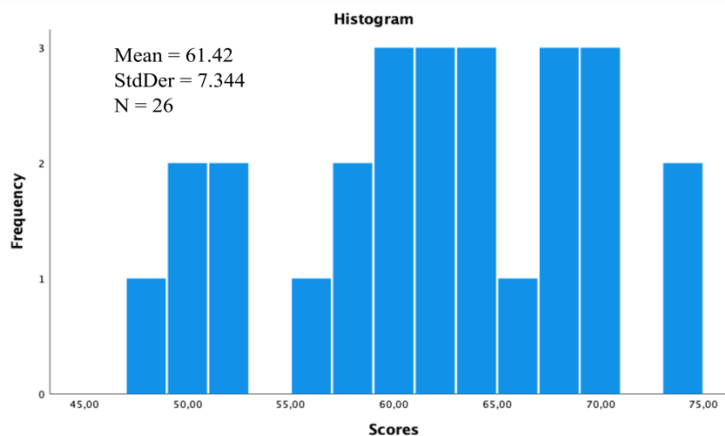
21. Me causó emoción poder constatar que la antena funcionaba

22. Es importante que haya este tipo de tareas en los cursos de Matemática para fortalecer habilidades necesarias en un futuro ingeniero.

Presentamos la tabla y el histograma realizado en SPSS. Los resultados fueron analizados a la hora de completar el cuestionario.

One-Sample T Test							
Test value = 2							
	t	df	Significance		Difference in means	99% Confidence Interval of the Differences	
			P-value One-Tailed	P-value Two-Tailed		Lower	Upper
Q1	14,423	25	<,001	<,001	1,615	1,30	1,93
Q2	3,638	25	<,001	,001	,577	,13	1,02
Q3	7,994	25	<,001	<,001	1,115	,73	1,50
Q4	6,374	25	<,001	<,001	1,000	,56	1,44
Q5	5,436	25	<,001	<,001	1,000	,49	1,51
Q6	3,942	25	<,001	<,001	,654	,19	1,12
Q7	2,004	25	,028	,056	,231	-,09	,55
Q8	6,429	25	<,001	<,001	1,038	,59	1,49
Q9	6,791	25	<,001	<,001	1,192	,70	1,68
Q10	3,682	25	<,001	,001	,615	,15	1,08
Q11	8,719	25	<,001	<,001	1,154	,78	1,52
Q12	10,916	25	<,001	<,001	1,346	1,00	1,69
Q13	5,204	25	<,001	<,001	1,000	,46	1,54
Q14	6,845	25	<,001	<,001	1,038	,62	1,46
Q15	5,354	25	<,001	<,001	,962	,46	1,46
Q16	10,718	25	<,001	<,001	1,269	,94	1,60
Q17	6,845	25	<,001	<,001	1,038	,62	1,46
Q18	12,127	25	<,001	<,001	1,538	1,18	1,89
Q19	12,559	25	<,001	<,001	1,423	1,11	1,74
Q20	14,423	25	<,001	<,001	1,615	1,30	1,93

Fuente: Elaboración personal.



Fuente: Elaboración personal.

4. Presentación de la propuesta a la comunidad académica



Revista Pensamiento Matemático revista@giepm.com a través de correoucuedu.onmicrosoft.com
para Victoria ▾

mié, 1 jun, 5:10 ☆ ↶ ⋮

Estimados autores:

Hemos recibido los comentarios de los árbitros. A la vista de los mismos, vuestro trabajo puede ser publicado en Pensamiento Matemático tras realizar ciertos pequeños cambios o correcciones resaltadas en rojo y azul en el archivo adjunto.

Se muestra un resumen de los comentarios de los árbitros, sus sugerencias deben ser tenidas en cuenta por los autores:

En este trabajo se aplica la Geometría fractal a la construcción de antenas fractales en el contexto de la asignatura de Álgebra Lineal en el segundo curso de varias titulaciones de Ingeniería de la Universidad Católica del Uruguay, en un buen ejemplo de didáctica transversal. Incluyen una encuesta de satisfacción sobre la experiencia didáctica y un estudio estadístico de la misma.

Resulta un artículo ideal para la sección de Experiencias Docentes, bien escrito y muy interesante.

Realizar las correcciones resaltadas en rojo en el archivo adjunto.

El artículo resulta una propuesta interesante para la Revista en su sección de Experiencias Docentes. Sería adecuado que los autores desarrollaran algo más acerca de la utilidad de esta antena, en particular si tiene algún uso específico o si es sólo estético.

Realizar las correcciones resaltadas en azul en el archivo adjunto.

Atentamente.

Mariló López González

Editora Jefe de la Revista Pensamiento Matemático

<https://revista.giepm.com/>

Revista Pensamiento Matemático

vie, 10 jun, 15:55 (hace 13 días)

para mí ▾

Estimados autores.

Evalúadas las correcciones del artículo os comunicamos que éste será publicado en el próximo número de Pensamiento Matemático (abril 23).

Os escribiremos cuando esté disponible.

Un saludo y gracias por el interés en nuestra publicación.

Mariló López

Editora Jefe de la Revista Pensamiento Matemático

<https://revista.giepm.com/>

5. Referencias bibliográficas

- [1] ALSINA, Claudi. *Teaching Applications and Modelling at Tertiary Level*, pp. 469–474, Boston, MA: Springer US, 2007, Available: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1>
- [2] ARTIGUE, Victoria, FANARO, María de los Ángeles Fanaro & LACUES, Eduardo. *Estado del arte sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría fractal en la escuela secundaria*, Pensamiento Matemático, vol. 11, no. 2, pp. 75–92, 2021.
- [3] ARTIGUE, Victoria; GAK, Joel; FANARO, María de los Ángeles; MOMBRÚ, Gabriela, FLORES GODOY, JOB. *Application of Fractal Geometry in the construction of antennas: an assessment of activities in context by engineering students*. Pensamiento Matemático. En prensa.
- [4] BARTOLUCCI, F., BACCI, D. & GNALDI, M. *Statistical Analysis of Questionnaires*. Taylor & Francis Ltd, 2015. available online at: https://www.ebook.de/de/product/24619181/francesco_bartolucci_silvia_bacci_michela_gnaldi_statistical_analysis_of_questionnaires.html
- [5] BINIMELIS, María Isabel. *Una nueva manera de ver el mundo. La geometría fractal*, España: RBA editores, 2011.
- [6] BLUM, Werner & NISS, Mogens. *Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – state, trends and issues in mathematics instruction*, Educational Studies in Mathematics, vol. 22, no. 1, pp. 37–68, 1991.
- [7] CAMARENA-GALLARDO, Patricia. *Mathematical models in the context of sciences*. In Proceedings from Topic Study Group 21 at the 11th International Congress on Mathematical Education, M. Blomhøj and S. Carreira, Eds. Monterrey, Mexico: Roskilde University, pp. 117–131, 2009.



- [8] CASTIBLANCO HERNÁNDEZ, S. E. & MONTANA PÁEZ, M. Y. *Geometría y dimensión: representación y caracterización de objetos 2D, 3D y 4D*. Tesis de Licenciatura, Universidad Pedagógica Nacional, Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas Bogota, Colombia, 2018.
- [9] DYSON, F. *Characterizing irregularity: Fractals. form, chance, and dimension*, Benoit B. Mandelbrot. Translation and revision of French edition (Paris, 1975). freeman, San Francisco, 1977. xviii, 366 pp., illus. Science, vol. 200, no. 4342, pp. 677–678, 1978.
- [10] FUSI, F. & SGRECCIA, N. *¿Por qué enseñar la noción de fractal en el último año de la escuela secundaria? opiniones de especialistas en Geometría*, Epsilon, no. 105, pp. 31–50, 2020.
- [11] GREAT SCOTT GADGETS. *HackRF One*, 2022. Accessed: 2022-03-30. available online at: <https://greatscottgadgets.com/hackrf/one/>
- [12] GROSSMAN, Stanley & FLORES-GODOY, José Job. *Algebra Lineal*. Ciudad de Mexico: McGraw-Hill/Interamericana Editores, S. A. de C. V, 2019.
- [13] IBM CORP. IBM SPSS STATISTICS FOR WINDOWS. RELEASED 2020. ARMONK, NY: IBM CORP.
- [14] JOHNS, R. *SQB methods fact sheet 1: Likert items and scales*, Accessed: 2022-03-30 available online at: <https://www.sheffield.ac.uk/polopoly fs/1.597637!/file/likertfactsheet.pdf>
- [15] MATHIGON.ORG. Accessed: 2022-04-8, 2022, [Online]. Available: <https://mathigon.org/>
- [16] MENDIBLE, A. & ORTIZ, J. *Modelización matemática en la formación de ingenieros. la importancia del contexto*. Enseñanza de la Matemática, vol. 12-16, pp. 133–150, No. Extraordinario, 2007.
- [17] MOORE, G. E. *Cramming more components onto integrated circuits, reprinted from electronics*, volume 38, number 8, april 19, 1965, pp.114 ff.” IEEE Solid-State Circuits Society Newsletter, vol. 11, no. 3, pp. 33–35, sep 2006, 1965.
- [18] MORENO-MARÍN, J. C. *Experiencia didáctica en Matemáticas: construir y estudiar fractales*. Suma, vol. 40, pp. 91–104, 2002.
- [19] PEITGEN, H.O., JURGENS, H. & SAUPE, D. *Chaos and Fractals*. Springer New York, 2004.
- [20] PEREZ MEDINA, C. R. *Transformaciones afines lineales y fractales*, Monografía, Universidad Pedagógica Nacional, Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas, Bogota, Colombia, 2007.
- [21] PLAN ESTRATÉGICO UCU 2019 – 2024. Universidad Católica del Uruguay. available online at: <https://ucu.edu.uy/sites/default/files/plan-estrategico-2019-2024.pdf>
- [22] RUBIANO ORTEGON, G. N. *Iteración y fractales* (con Mathematica®). Bogota: Universidad Nacional de Colombia, 2009.
- [23] SANDOVAL, F. & VIRE GUAMAN, S. G. *Diseño e implementación de antenas fractales para uhf*. Memoria de proyecto de fin de carrera, Universidad Técnica Particular de Loja, Escuela de Electrónica y Telecomunicaciones, Loja, Ecuador, 2008.